Математика **Л-230911** **04.03.2024**

Урок №103

Тема: Решение задач по теме «Применение геометрического смысла определённого интеграла для вычисления площади лесного квартала»

Срок сдачи до 05.03.2024

Распределение по вариантам:

Фамилия Имя	Вариант
Гарматюк Александр	1
Гарматюк Александра	2
Глебова Елена	1
Демиденко Роман	2
Забродин Георгий	1
Киселева Доминика	2
Клименок Андрей	1
Колмагоров Дмитрий	2
Комболин Данил	1
Москвин Иван	2
Николаев Николай	1
Овчинникова Карина	2
Пенкина Вероника	1
Подмазов Владислав	2
Поленчик Мария	1
Поляничкина Антонина	2
Пятакова Ирина	1
Рыжаков Вячеслав	2
Стаценко Тихон	1
Чагина Анастасия	2
Чуфаров Егор	1
Шестакова Дарья	2
Шефер Михаил	1
Шилова Анастасия	2
Сызранцев Константин	1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Алгебра и начала анализа.10-11 классы; под ред.А.Н.Колмогорова.М: Просвещение,2011. Стр.194-199.

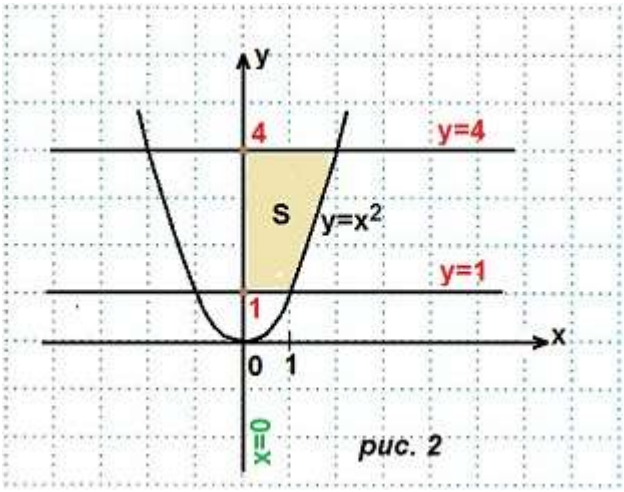


рис. 2

Пример 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=1$, $y=4$и осью Оу.

Решение. Построим данную криволинейную трапецию (*рис. 2*). Выразим x через y:

$$x = \sqrt{y}.$$

Искомую площадь S находим по формуле Ньютона-Лейбница (ф. Н-Л). У нас a=1, b=4.

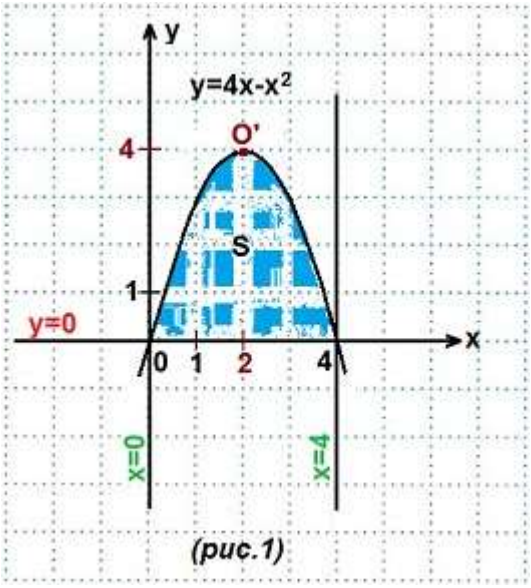
$$S = \int_1^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3} y \sqrt{y}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}$$

Ответ: $S = 4\frac{2}{3}$ (кв. ед.)

Площадь криволинейной трапеции. Примеры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y=f (x), снизу — осью Ox, слева и справа прямыми x=a, x=b, находят по формуле Ньютона-Лейбница (ф. Н-Л):

$$S=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad \textbf{(ф. Н-Л)}$$



(рис.1)

Пример 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y=4x-x^2$;$y=0$; $x=0$; $x=4$.

<u>Решение.</u> Строим графики данных линий. (*рис. 1*).

1) $y=4x-x^2$ — парабола (вида $y=ax^2+bx+c$). Запишем данное уравнение в общем виде: $y=-x^2+4x$. Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент $a=-1<0$.

Вершина параболы находится

в точке $O'(m; n)$, где

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2; \quad n = y(m) = 4\cdot 2 - 2^2 = 4.$$

$O'(2; 4)$. Нули функции (точки пересечения графика с осью Ox) найдем из уравнения:

$4x-x^2=0$.

Выносим x за скобки, получаем: $x(4-x)=0$.

Отсюда, $x=0$ или $x=4$. Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки: (0; 0) и (4; 0).

2) $y=0$ — это ось Ox; 3) $x=0$ — это ось Oy; 4) $x=4$ — прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по (ф. Н-Л). У нас $f(x)=4x-x^2$,$a=0$, $b=4$.

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = (4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = (2x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S=10\frac{2}{3}$ (кв. ед.)

Кстати, если Вы подсчитаете все целые заштрихованные клетки и добавите к ним половину всех остальных клеток заштрихованной фигуры, то получите приближенное значение искомой площади. Действительно, если единичный отрезок равен одной клетке, то площадь квадратика со стороной, равной 1 клетке, равна 1·1=1 (кв. ед.). Сколько квадратиков — столько квадратных единиц и составляет площадь фигуры.

Пример 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y=\cos x$; $y=0$; $x=-\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{\pi}{6}$.

<u>Решение.</u> Строим графики данных линий. (*рис. 2*).

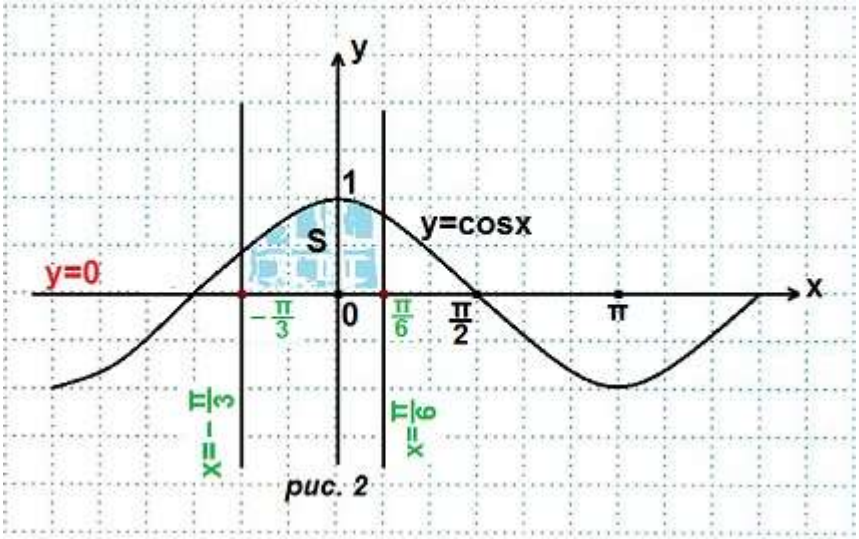


рис. 2

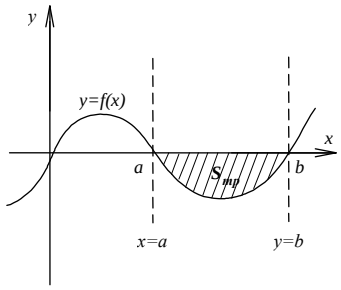
Площадь данной криволинейной трапеции:

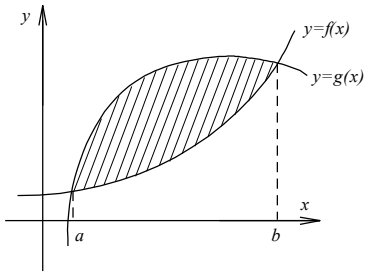
$$S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \sin(\frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.)

ХОД ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

<table>
<tr><td>I вариант</td><td>II вариант</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Контрольные вопросы</td></tr>
<tr><td colspan="2">а) что такое криволинейная трапеция?
б) записать формулы для вычисления криволинейных трапеций следующего вида:
 


</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вычислить площадь лесного квартала, ограниченного линиями:</td></tr>
<tr><td>1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$;
2) $y = x^3 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;</td><td>4) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -3$;
5) $y = x^3$, $y = 0$, $x - 3$, $x = 1$;
6) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.</td></tr>
</table>